ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Математика. Муниципальный этап, 2022

4 класс. Ключи

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача 1. *Пример проверять*! Один из вариантов: 8+12+20+2:2 = 41. *Любой верный пример — 5 баллов.*

Задача 2. 7840 см.

Задача 3. 8.

Задача 4. 20.10.8222.

Задача 5. 59.

Задача 6. Кекс.

Задача 7. 118.

Задача 8. 52.

Задача 9. 154.

Задача 10. 2, 5, 4, 3, 1.

Задача 11. 4.

Задача 12. 13.

Задача 13. 8.
Задача 14. 42.

Задача 15. 6.

Задача 16. 5.

Задача 17. а) 4; б) 0. *Верный ответ: а) 3 балла, б) 2 балла.*

Задача 18. 7.

Задача 19. Далматинец из Казани.

Задача 20. 9999.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Математика. Муниципальный этап, 2022

6 класс. Ключи

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача 1. 135.

Задача 2. 2,5.

Задача 3. 20.10.8222.

Задача 4. 26.

Задача 5. 18.

Задача 6. 4.

Задача 7. 11.

Задача 8. 2.

Задача 9. 9.

Задача 10. *Проверять пример!* Например, так: (8 – 12 + 202) ÷ 2 = 99 или (81 – 2 – 2 + 0) + 22 = 99. *Любой верный пример — 5 баллов.*

Задача 11. 1/9.

Задача 12. 16.

Задача 13. 25.

Задача 14. 30.

Задача 15. а) 4; б) 0. *Верный ответ: а) 3 балла, б) 2 балла.*

Задача 16. 2.

Задача 17. 495.

Задача 18. 16888.

Задача 19. а) 8; б) 0. *Верный ответ: а) 2 балла, б) 3 балла.*

Задача 20. 30.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Математика. Муниципальный этап, 2022

7 класс. Ключи

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача 1. 198.

Задача 2. 3,5.

Задача 3. 60.

Задача 4. 5.

Задача 5. 7.

Задача 6. 80.

Задача 7. 81. *Также принимать ответ «81%».*

Задача 8. 3.

Задача 9. 8.

Задача 10. *Проверять пример!* Например, так: (8 + 12) × 20 ÷ 2 – 2 = 198. *Любой верный пример — 5 баллов.*

Задача 11. 7.

Задача 12. 22.

Задача 13. 77.

Задача 14. а) 6; б) 2. *Верный ответ: а) 3 балла, б) 2 балла.*

Задача 15. 5.

Задача 16. 20.

Задача 17. 6.

Задача 18. 32.

Задача 19. 70.

Задача 20. 2022.

8 класс

1. Можно ли найти четыре различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трёх делится на 3, а сумма всех четырёх делится на 4?

Ответ: *можно, например,* 5, 17, 29 *и* 41.

Решение. Указанные четыре числа можно записать в виде $12k + 5$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, поэтому сумма любых трёх чисел

$$(12k_1 + 5) + (12k_2 + 5) + (12k_3 + 5) = 12(k_1 + k_2 + k_3) + 15$$

делится на 3. Все числа в наборе нечётные, значит, сумма любых двух делится на 2. Наконец, сумма всех четырёх чисел равна 72 и делится на 4.

`Замечание`. Можно доказать, что все числа имеют равные остатки при делении на 6.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов. Отмечено, что числа имеют равные остатки при делении на 3 или на 6, однако приведён ошибочный пример — 2 балла.

2. По кругу расставили в некотором порядке числа от 1 от 8, а затем записали суммы соседних чисел. Могло ли получиться 8 последовательных чисел (в каком-то порядке)?

Ответ: *нельзя.*

Решение. Предположим, что получилось восемь последовательных чисел-сумм

$$x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3, x+4.$$

Сумма этих чисел равна $8x + 4$, и она должна быть в два раза больше суммы чисел от 1 до 8 (каждое участвует ровно в двух суммах). Тогда

$$8x + 4 = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) = 72, \iff 2x = 17.$$

Такого целого числа x нет.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Найдите все различные простые числа a, b и c такие, что $ab + bc + ca \geqslant abc$.

Ответ: $a = 2, b = 3, c = 5$ *и все наборы, полученные перестановкой этих чисел.*

Решение. Предположим, что $a < b < c$, тогда $ab < bc$ и $ac < bc$.

Если $a \geqslant 3$, то $ab + bc + ca < 3bc \leqslant abc$, противоречие. Число a — простое, значит, $a = 2$, и тогда получаем $2b + 2c + bc \geqslant 2bc$, или $0 \geqslant bc - 2b - 2c$. Прибавим 4 к обеим частям и запишем последнее неравенство в виде:

$$4 \geqslant (b-2)(c-2).$$

Поскольку $3 \leqslant b < c$ и каждый сомножитель в правой части не превосходит 4, неравенство выполняется только для чисел $b = 3$, $c = 5$.

Критерии. Указан только набор $(2, 3, 5)$ или его перестановка — 1 балл. Доказано, что наименьшее число равно 2 — ещё 3 балла. За отсутствие перестановок набора $(2, 3, 5)$ баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

4. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом?

Ответ: 22 *рыцаря.*

Решение. Из условия задачи следует, что число рыцарей, имеющих по два соседа-рыцаря, не превосходит 10; то же самое можно сказать и про число рыцарей, имеющих по одному соседу-рыцарю. Поэтому число пар рыцарей-соседей друг друга не превосходит $(2 \cdot 10 + 1 \cdot 10) : 2 = 15$. А поскольку всего за столом имеется 30 пар соседей, то по меньшей мере в $30 - 15 = 15$ парах есть люди, рыцарями не являющиеся; число таких людей не меньше, чем $\left[\frac{15}{2}\right] + 1 = 8$.

Приведём пример, показывающий, что за столом может быть в точности $30 - 8 = 22$ рыцаря. Пусть сидящие пронумерованы числами от 1 до 30 по часовой стрелке, а рыцарями являются все те, чьи номера отличны от 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23. Тогда все необходимые условия будут выполнены, если № 1 ответит «два», а № 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23 — «ни одного».

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число рыцарей не более 22 (*оценка*) — 3 балла. Приведён пример с 22 рыцарями — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол A равен $75°$, угол C равен $60°$. На продолжении стороны AC за точку C отложили отрезок CD, равный половине стороны AC. Найдите угол BDC.

Ответ: $\angle BDC = 45°$.

Решение. В данном треугольнике угол ABC, очевидно, равен $180° - 75° - 60° = 45°$. Проведём высоту AH и заметим, что треугольник AHB — равнобедренный, так как $\angle BAH = 90° - 45° = \angle ABH$ (рис. 1). Значит, $AH = BH$. В прямоугольном треугольнике AHC угол HAC равен $75° - 45° = 30°$, поэтому катет HC равен половине гипотенузы AC, то есть равен CD. Таким образом, треугольник HCD — равнобедренный, и $\angle HCD = 120°$, поэтому углы CHD и CDH равны $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. Поскольку $\angle HAD = \angle ADH = 30°$, треугольник AHD также равнобедренный и $BH = AH = DH$, то есть равнобедренным будет и треугольник BHD. По свойству внешнего угла, $\angle HBD = \angle HDB = \frac{1}{2}\angle CHD = 15°$. Следовательно, $\angle BDC = \angle BDH + \angle HDC = 45°$.

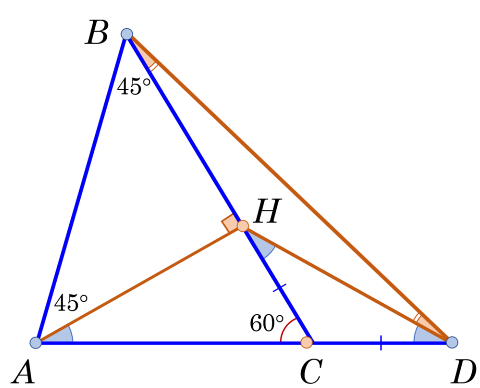

Рис. 1

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказана равнобедренность треугольника AHB — 1 балл, треугольника AHD — 4 балла, треугольника BHD — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

9 класс

1. Можно ли найти пять различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 3, ни на 4, ни на 5, но сумма любых трёх делится на 3, сумма любых четырёх делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5?

Ответ: *можно, например,* 1, 61, 121, 181 *и* 241.

Решение. Указанные пять чисел можно записать в виде $60k+1$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, поэтому сумма любых трёх чисел

$$(60k_1+1)+(60k_2+1)+(60k_3+1)=60(k_1+k_2+k_3)+3$$

делится на 3. Аналогично доказывается, что суммы любых четырёх и сумма всех пяти чисел делятся на 4 и на 5 соответственно.

Замечание. Можно доказать, что все числа имеют равные остатки при делении на 12.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов. Отмечено, что числа имеют равные остатки при делении на 3 или на 4, однако приведён ошибочный пример — 2 балла.

2. Известно, что $2x+y^2+z^2\leqslant 2$. Докажите, что $x+y+z\leqslant 2$.

Решение. По условию $2x\leqslant 2-y^2-z^2$, и значит, $2x+2y+2z\leqslant 2-(y^2-2y)-(z^2-2z)$. Выделяя полные квадраты, получим

$$2x+2y+2z\leqslant 4-(y-1)^2-(z-1)^2\leqslant 4.$$

Таким образом, $2x+2y+2z\leqslant 4 \iff x+y+z\leqslant 2$. Знак равенства только при $y=z=1$ и $x\leqslant 0$.

Критерии. Доказано неравенство $2x+2y+2z\leqslant 4-(y-1)^2-(z-1)^2$ или аналогичное ему — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что суммы цифр каждого из чисел n и $n+1$ делятся на 17.

Ответ: 8899.

Решение. Если n оканчивается не на 9, то суммы цифр чисел n и $n+1$ отличаются на 1 и не могут делиться на 17 одновременно. Пусть $n=\overline{m99\ldots9}$, где в конце стоит k девяток, а число m имеет сумму цифр s и *не оканчивается* на 9. Тогда сумма цифр числа n равна $s+9k$, а сумма цифр числа $n+1$, очевидно, равна $s+1$. По условию эти две суммы делятся на 17, в частности, число $s+1$ кратно 17 $\Longrightarrow s\geqslant 16$. Наименьшее число m, которое не оканчивается на 9 и у которого сумма цифр 16, равно 88.

Далее, на 17 делится число $s+9k=(s+1)+(9k-1)$. Поскольку первое слагаемое делится на 17, число $9k-1$ тоже кратно 17. Наименьшее значение k, удовлетворяющее этому условию, равно 2, то есть $n=8899$. Суммы цифр каждого из чисел n и $n+1$ делятся на 17.

Критерии. Доказано, что искомое число оканчивается цифрой 9 — 1 балл. Верный ответ — 2 балла. Доказано, что сумма цифр, отличных от 9, не меньше 16 — ещё 2 балла. Доказано. что девяток ровно две — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом?

Ответ: 22 *рыцаря.*

Решение. Из условия задачи следует, что число рыцарей, имеющих по два соседа-рыцаря, не превосходит 10; то же самое можно сказать и про число рыцарей, имеющих по одному соседу-рыцарю. Поэтому число пар рыцарей-соседей друг друга не превосходит $(2 \cdot 10 + 1 \cdot 10) : 2 = 15$. А поскольку всего за столом имеется 30 пар соседей, то по меньшей мере в $30 - 15 = 15$ парах есть люди, рыцарями не являющиеся; число таких людей не меньше, чем $\left[\frac{15}{2}\right] + 1 = 8$.

Приведём пример, показывающий, что за столом может быть в точности $30 - 8 = 22$ рыцаря. Пусть сидящие пронумерованы числами от 1 до 30 по часовой стрелке, а рыцарями являются все те, чьи номера отличны от 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23. Тогда все необходимые условия будут выполнены, если № 1 ответит «два», а № 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23 — «ни одного».

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число рыцарей не более 22 (*оценка*) — 3 балла. Приведён пример с 22 рыцарями — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC точка O_1 — центр вписанной окружности. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка D. Окружность с центром O_2 касается отрезка CD и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что если $O_1C = O_2C$, то треугольник BCD — равнобедренный.

Решение. (Рис. 2.) Угол CO_1O_2 — внешний для треугольника ACO_1, поэтому

$$\angle CO_1O_2 = \angle CAO_1 + \angle ACO_1 = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle CBD.$$

Далее, пусть E — некоторая точка на продолжении отрезка AC за точку C. Угол ECO_2 — внешний для треугольника ACO_2. Отсюда $\angle CO_2O_1 = \angle ECO_2 - \angle CAO_2 = \frac{1}{2}\angle ECD - \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CDA$.

Таким образом, из равенства $O_1C = O_2C$ следует равенство углов CO_1O_2 и CO_2O_1, а значит, и углов CBD и CDB. Отсюда следует, что треугольник BCD — равнобедренный.

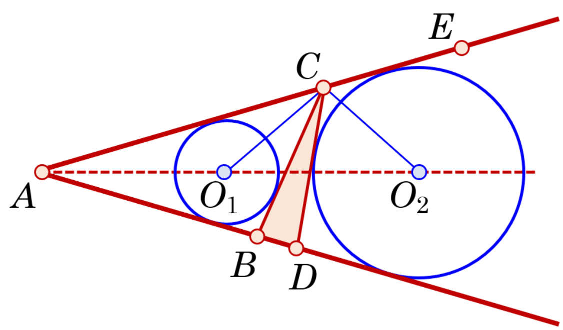

Рис. 2

Критерии. Доказано, что угол CO_1O_2 равен $\frac{1}{2}\angle CBD$ — 3 балла. Доказано, что угол CO_2O_1 равен $\frac{1}{2}\angle CDA$ — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

10 класс

1. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего его числа.

Ответ: 1 999 999 999.

Решение. Среди 9-значных чисел сумма цифр наибольшая у числа 999 999 999, она равна 81. Поскольку искомое 10-значное число больше 999 999 999, мы должны подобрать наименьшее число с суммой цифр не меньше, чем 82. Если первая цифра этого числа 1, то сумма остальных цифр не меньше 81, и значит, девять остальных цифр — это девятки.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Доказано, что сумма цифр искомого числа больше 81 — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 9 раз меньше, чем все остальные вместе взятые. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

Ответ: 15 *шахматистов.*

Решение. Если количество участников n, то каждый сыграл $n-1$ партий. Половину партий победитель выиграл и набрал $\frac{1}{2}(n-1)$ очков. Половину партий он сыграл вничью и набрал ещё $\frac{1}{4}(n-1)$ очков. Всего победитель набрал $\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{3}{4}(n-1)$ очков.

В турнире было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. В каждой партии игроки разыграли одно очко, поэтому в сумме набрали соответственно $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Значит,

$$9\cdot\frac{3(n-1)}{4}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{3(n-1)}{4},$$

откуда $n=15$. Итак, в турнире из 15 шахматистов победитель сыграл 14 партий и набрал $7+3,5=10,5$ очка, остальные набрали $\frac{1}{2}\cdot 15(15-1)-10,5=94,5$ очка, то есть в 9 раз больше, чем у победителя.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что при $n=15$ турнир удовлетворяет условию, но не обосновано, что других решений нет — 2 балла. Правильно составлено уравнение для числа участников — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Докажите, что любое нечётное составное число можно представить в виде суммы трёх или более последовательных нечётных положительных слагаемых. Сколько существует таких способов для числа 2021?

Ответ: *ровно один способ,* $2021=5+7+9+\ldots+89$.

Решение. Пусть $n=a\cdot b$ — составное число, и $1<a\leqslant b<n$. Попробуем представить n в виде суммы из m последовательных нечётных слагаемых:

$$n=(2k+1)+(2k+3)+\ldots+(2k+2m-1)=m\cdot(2k+m).$$

Поскольку $n=a\cdot b$, одно из решений уравнения $a\cdot b=m\cdot(2k+m)$ имеет вид $a=m$, $b=2k+m$, и тогда $n=(b-a+1)+(b-a+3)+\ldots+(b+a-1)$.

В частности, для числа $2021=43\cdot 47$ есть только одно решение уравнения $43\cdot 47=m(2k+m)$, а именно, $m=43$, $2k+m=47$, а значит, и единственный способ записи в виде суммы последовательных нечётных слагаемых: $2021=5+7+9+\ldots+89$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Верный пример для числа 2021 — 1 балл. Доказано, что других способов нет — ещё 1 балл. Разобран общий случай — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. Пусть x, y и z — действительные числа. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $f = \cos x \sin y + \cos y \sin z + \cos z \sin x$.

Ответ: $\max f = \frac{3}{2}$, $\min f = -\frac{3}{2}$.

Решение. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения оценим выражение $|f|$, используя свойство абсолютной величины: модуль суммы нескольких чисел не превосходит суммы модулей этих чисел. Поэтому $|f| \leqslant |\cos x \sin y| + |\cos y \sin z| + |\cos z \sin x|$. Теперь оценим каждое слагаемое с помощью неравенства о средних $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2) \iff 0 \leqslant (|a|-|b|)^2$:

$$|f| \leqslant \tfrac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 y) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 y + \sin^2 z) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 z + \sin^2 x).$$

Правая часть неравенства равна $\frac{3}{2}$, поэтому $|f| \leqslant \frac{3}{2}$, то есть $-\frac{3}{2} \leqslant f \leqslant \frac{3}{2}$. Наибольшее значение $\frac{3}{2}$ достигается, например, при $x = y = z = \pi/4$, наименьшее значение $-\frac{3}{2}$ — при $x = y = z = -\pi/4$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Верно указан набор значений x, y, z, при которых $f = \frac{3}{2}$ или $f = -\frac{3}{2}$ — 1 балл. Доказано только одно неравенство $f \leqslant \frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2} \leqslant f$), но не проверена достижимость значения $\frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2}$) — 3 балла. Доказано только одно неравенство $f \leqslant \frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2} \leqslant f$) и проверена достижимость значения $\frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2}$) — 4 балла. Доказано неравенство $|f| \leqslant \frac{3}{2}$, но не проверена достижимость значений $\pm\frac{3}{2}$ — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC, а угол B равен $40°$. На стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Найдите угол MPT.

Ответ: $20°$.

Решение. (Рис. 3.) В четырехугольнике $APMT$ угол при вершине A измеряется половиной дуги TCB. Треугольники PMB и CMB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle PMB = \angle CMB = \angle AMT$. Угол AMT измеряется полусуммой дуг AT и CB, причём:

$$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{CB}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{CB}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TCB}.$$

Значит, $\angle CMB = \angle BAT$. Таким образом, $\angle PMB = \angle BAT$ и $\angle BAT + \angle PMT = \angle BAT + (180° - \angle PMB) = 180°$. Следовательно, сумма противоположных углов четырехугольника $APMT$ равна $180°$, и значит, $APMT$ — вписанный. По свойству вписанных углов $\angle MPT = \angle MAT = \angle CAT = \angle TBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20°$.

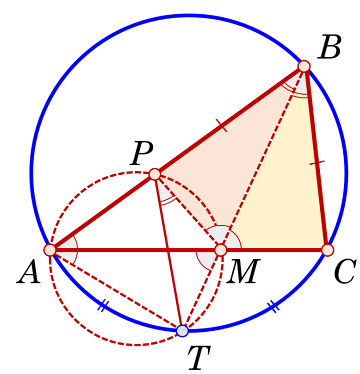

Рис. 3

Критерии. Отмечено равенство углов PMB и CMB (или AMT) — 1 балл. Доказано, что угол AMT или CMB равен углу BAT — 2 балла. Доказано, что четырёхугольник $APMT$ вписанный — 5 баллов. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

11 класс

1. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр не меньше, чем у любого меньшего его числа.

Ответ: 1 899 999 999.

Решение. Среди 9-значных чисел сумма цифр наибольшая у числа 999 999 999, она равна 81. Поскольку искомое 10-значное число больше 999 999 999, мы должны подобрать наименьшее число с суммой цифр не меньше, чем 81. Сумма последних восьми цифр искомого числа не больше $9 \cdot 8 = 72$, поэтому первые две цифры в сумме не меньше, чем $81 - 72 = 9$. Так как искомое число наименьшее, его первая цифра равна 1, а вторая — 8. Тогда сумма остальных восьми цифр не меньше 72, и значит, оставшиеся цифры — это девятки.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Доказано, что сумма цифр искомого числа не меньше 81 — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 13 раз меньше, чем все остальные. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

Ответ: 21 *шахматист.*

Решение. Если количество участников n, то каждый сыграл $n-1$ партий. Половину партий победитель выиграл и набрал $\frac{1}{2}(n-1)$ очков. Половину партий он сыграл вничью и набрал ещё $\frac{1}{4}(n-1)$ очков. Всего победитель набрал $\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{4}(n-1) = \frac{3}{4}(n-1)$ очков.

В турнире было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. В каждой партии игроки разыграли одно очко, поэтому в сумме набрали соответственно $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Значит,

$$13 \cdot \frac{3(n-1)}{4} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{3(n-1)}{4},$$

откуда $n = 21$. Итак, в турнире из 21 шахматиста победитель сыграл 20 партий и набрал $10 + 5 = 15$ очков, остальные набрали $\frac{1}{2} \cdot 21(21-1) - 15 = 195$ очков, то есть в 13 раз больше, чем у победителя.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что при $n = 21$ турнир удовлетворяет условию, но не обосновано, что других решений нет — 2 балла. Правильно составлено уравнение для числа участников — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна 3. Чему равно наибольшее возможное значение площади поверхности у такого параллелепипеда?

Ответ: 18.

Решение. Пусть рёбра прямоугольного параллелепипеда — a, b и c. По условию задачи его диагональ равна $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 3$, и значит, $a^2+b^2+c^2 = 9$. Площадь поверхности параллелепипеда равна $f = 2(ab+bc+ca)$. Докажем неравенство $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$. Действительно, умножим обе части на 2 и запишем его в равносильной форме

$$2ab+2bc+2ca \leqslant 2a^2+2b^2+2c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leqslant 0.$$

Из доказанного неравенства следует, что наибольшее значение функции f не превосходит $2 \cdot 9 = 18$, причём знак равенства возможен только в случае прямоугольного параллелепипеда, у которого все рёбра равны $a = b = c = \sqrt{3}$, то есть для куба с ребром $\sqrt{3}$.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 0 баллов. Правильно составлена функция f — 1 балл. Отмечено (без обоснования), что наибольшее значение достигается для куба и правильно подсчитана длина его ребра — ещё 1 балл. Доказательство оценки без указания примера — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. Все значения квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[\,0; 2\,]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|$? Для какой функции $f(x)$ достигается это значение?

Ответ: *наибольшее значение равно* 7; *достигается, например, для* $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

Решение. По условию значения $f(x) = ax^2+bx+c$ отрезке $[0; 2]$ по модулю не превосходят единицы. В частности, $|\,f(0)\,| \leqslant 1$, $|\,f(1)\,| \leqslant 1$, $|\,f(2)\,| \leqslant 1$, что равносильно системе

$$\begin{cases} |\,c\,| \leqslant 1, \\ |\,a+b+c\,| \leqslant 1, \\ |\,4a+2b+c\,| \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку модуль суммы чисел не превосходит суммы их модулей, получаем неравенства

$$|\,2a\,| = |\,(4a+2b+c) - 2(a+b+c) + c\,| \leqslant |\,4a+2b+c\,| + 2\,|\,(a+b+c)\,| + |\,c\,| \leqslant 4,$$
$$|\,2b\,| = |\,4(a+b+c) - (4a+2b+c) - 3c\,| \leqslant 4\,|\,a+b+c\,| + |\,4a+2b+c\,| + 3\,|\,c\,| \leqslant 8,$$

откуда $|\,a\,| \leqslant 2$, $|\,b\,| \leqslant 4$, и значит, $|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,| \leqslant 7$.

Для функции $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ величина $|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,|$ в точности равна 7. Кроме того, квадратный трёхчлен $f(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$ удовлетворяет условию задачи, так как при $x \in [\,0; 2\,]$

$$-1 = f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0) = f(2) = 1.$$

Таким образом, наибольшее значение величины $|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,|$ при данных условиях равно 7.

Критерии. Верный ответ — 0 баллов. Доказано неравенство $|\,c\,| \leqslant 1$ — 1 балл. Доказано только одно из неравенств $|\,a\,| \leqslant 2$ или $|\,b\,| \leqslant 4$, — ещё 2 балла. Доказано, что сумма модулей не превосходит 7, — 5 баллов (с предыдущими баллами не суммируются). Пример функции без обоснования оценки — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и BB_2 внутреннего и внешнего углов при вершине B. Из точки H пересечения высот опущены перпендикуляры HH_1 и HH_2 на прямые BB_1 и BB_2. В каком отношении прямая H_1H_2 делит сторону AC?

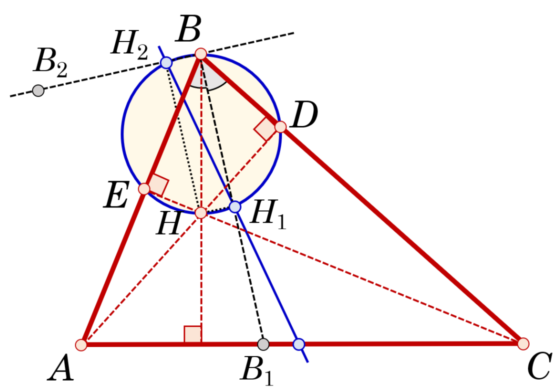

Рис. 4

Ответ: *прямая* H_1H_2 *делит* AC *пополам.*

Решение. (Рис. 4.) Пусть AD и CE — высоты треугольника ABC. Поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, четырёхугольник HH_2BH_1 — прямоугольник. Диагонали H_1H_2 и BH — диаметры описанной окружности прямоугольника. Эта окружность проходит через точки E и D, так как из этих точек диаметр BH виден под прямым углом. Точка H_1 лежит на биссектрисе вписанного угла EBD, поэтому H_1 — середина дуги ED, не содержащей точки H_2, а так как H_1H_2 — диаметр окружности, то точки H_1 и H_2 также равноудалены от концов отрезка ED. Другими словами, серединный перпендикуляр к отрезку ED проходит через точки H_1 и H_2. Далее, так как четырёхугольник $AEDC$ является вписанным в окружность с диаметром AC, то серединный перпендикуляр к хорде ED проходит через центр этой новой окружности, то есть через середину отрезка AC. Таким образом, прямая H_1H_2 делит сторону AC пополам.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Отмечено, что четырёхугольник $BDHE$ вписан в окружность с диаметром BH — 1 балл. Доказано, что точки H_1 и H_2 являются серединами малой и большой дуги ED — ещё 2 балла. Отмечено, что прямая H_1H_2 является серединным перпендикуляром к отрезку ED — ещё 1 балл. Доказано, что для описанной окружности четырёхугольника $AEDC$ серединный перпендикуляр к отрезку ED проходит через середину AC — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.